hoops & trees

Miguel Andrés Marcos

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, UNL, CONICET, FIQ

Seminario “Carlos Segovia Fernández”
Santa Fe - 2016

Categorías

Una categoría es una colección de "objetos" y "flechas" entre objetos (morfismos).

Categorías

Una categoría es una colección de "objetos" y "flechas" entre objetos (morfismos).

- (existencia de la composición)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Una categoría es una colección de "objetos" y "flechas" entre objetos (morfismos).

- (existencia de la composición)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f !"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\equiv"] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

Categorías

Una categoría es una colección de “objetos” y “flechas” entre objetos (morfismos).

- (asociatividad de la composición)

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[dl, "g"] \\
C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}
$$

Categorías

Una categoría es una colección de "objetos" y "flechas" entre objetos (morfismos).

- (asociatividad de la composición)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \circ f"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & B \arrow[d, "h \circ g"] \\ C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Categorías

Una categoría es una colección de “objetos” y “flechas” entre objetos (morfismos).

- (identidad)

$$A \xrightarrow{id_A} A$$

Categorías

Una categoría es una colección de "objetos" y "flechas" entre objetos (morfismos).

- (identidad)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & A \\
B \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Categorías

Una categoría es una colección de "objetos" y "flechas" entre objetos (morfismos).

- (identidad)

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\equiv" near start] \\
 & B
\end{tikzcd}
$$

Productos y coproductos

$\{A_i\}_{i \in I}$ colección de objetos.

Productos y coproductos

$\{A_i\}_{i\in I}$ colección de objetos.

- $\prod_{i\in I} A_i$ es **producto** si para todo $j \in I$

$$\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j$$

Productos y coproductos

$\{A_i\}_{i\in I}$ colección de objetos.

- $\prod_{i\in I} A_i$ es **producto** si para todo $j \in I$

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \\ & B \arrow[u, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

Productos y coproductos

$\{A_i\}_{i \in I}$ colección de objetos.

- $\prod_{i \in I} A_i$ es **producto** si

$$\begin{tikzcd} \prod_{i \in I} A_i \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \\ & B \arrow[u, "f_j"'] \arrow[ul, dashed, "f!"] \arrow[ul, phantom, shift left=3ex, "\equiv"] \end{tikzcd} \qquad \forall j \in I$$

Productos y coproductos

$\{A_i\}_{i\in I}$ colección de objetos.

- $\coprod_{i\in I} A_i$ es **coproducto** si

$$\coprod_{i\in I} A_i \xleftarrow{\iota_j} A_j$$

Productos y coproductos

$\{A_i\}_{i\in I}$ colección de objetos.

- $\coprod_{i\in I} A_i$ es **coproducto** si

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} A_i & A_j \arrow[l, "\iota_j"'] \arrow[d, "f_j"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Productos y coproductos

$\{A_i\}_{i\in I}$ colección de objetos.

- $\coprod_{i\in I} A_i$ es **coproducto** si

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I} A_i \arrow[dr, dashed, "f!"'] & & A_j \arrow[ll, "\iota_j"'] \arrow[d, "f_j"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\ & & B \end{tikzcd} \qquad \forall j \in I$$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

F define una **equivalencia** de categorías si

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

F define una **equivalencia** de categorías si

- es **denso**: para cada X en $\mathcal{D}$ existe A en $\mathcal{C}$ con $X \cong F(A)$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

F define una **equivalencia** de categorías si

- es **denso**: para cada X en $\mathcal{D}$ existe A en $\mathcal{C}$ con $X \cong F(A)$
- es **fiel**: si $f, g : A \to B$ en $\mathcal{C}$ tienen $F(f) = F(g)$, $f = g$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor (covariante)** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

F define una **equivalencia** de categorías si

- es **denso**: para cada X en $\mathcal{D}$ existe A en $\mathcal{C}$ con $X \cong F(A)$
- es **fiel**: si $f, g : A \to B$ en $\mathcal{C}$ tienen $F(f) = F(g)$, $f = g$
- es **pleno**: si $g : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$, existe $f : A \to B$ con $g = F(f)$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor contravariante** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(B) \to F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$
- $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$

Funtores

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías.
Un **funtor contravariante** es un mapeo F tal que

- A en $\mathcal{C} \longmapsto F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $f : A \to B$ en $\mathcal{C} \longmapsto F(f) : F(B) \to F(A)$ en $\mathcal{D}$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$
- $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$

F define una **dualidad** de categorías si

- es **denso**: para cada X en $\mathcal{D}$ existe A en $\mathcal{C}$ con $X \cong F(A)$
- es **fiel**: si $f, g : A \to B$ en $\mathcal{C}$ tienen $F(f) = F(g)$, $f = g$
- es **pleno**: si $g : F(B) \to F(A)$ en $\mathcal{D}$, existe $f : A \to B$ con $g = F(f)$

Forests y trees

Forests y trees

Un **forest** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

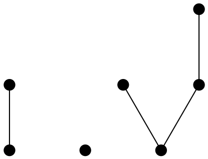
son cadenas.

Forests y trees

Un **forest** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

son cadenas.

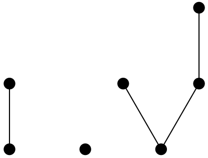


Forests y trees

Un **forest** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

son cadenas.



Morfismos: $f : F \to F'$ que preserva el orden y es **abierta**: si $x' \leq f(x)$ en F', existe $y \leq x$ en F con $f(y) = x'$.

Forests y trees

Un **tree** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

son cadenas

Forests y trees

Un **tree** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

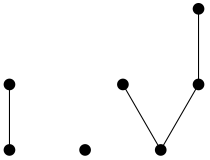
son cadenas y tiene un elemento mínimo (raíz) al que denotamos $\perp$.

Forests y trees

Un **tree** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

son cadenas y tiene un elemento mínimo (raíz) al que denotamos $\perp$.

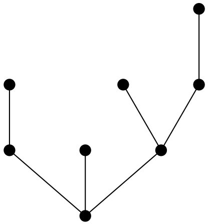


Forests y trees

Un **tree** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

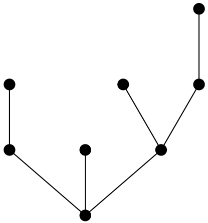
son cadenas y tiene un elemento mínimo (raíz) al que denotamos $\perp$.



Un **tree** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

son cadenas y tiene un elemento mínimo (raíz) al que denotamos $\perp$.



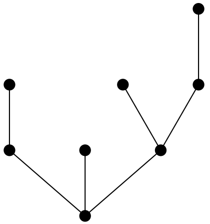
Morfismos: $f : F \to F'$ que preserva el orden y es **abierta**: si $x' \leq f(x)$ en F', existe $y \leq x$ en F con $f(y) = x'$.

Forests y trees

Un **tree** es un conjunto parcialmente ordenado $(F, \leq)$ tal que sus downsets

$$\downarrow x = \{y \in F : y \leq x\}$$

son cadenas y tiene un elemento mínimo (raíz) al que denotamos $\perp$.



Morfismos: $f : F \to F'$ que preserva el orden y es **abierta**: si $x' \leq f(x)$ en F', existe $y \leq x$ en F con $f(y) = x'$. De esto se obtiene que $f(\perp) = \perp$.

Coproducto en la categoría de Forests.

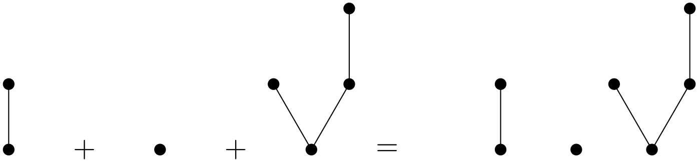
Coproducto en la categoría de Forests. *(unión disjunta)*

$$
\begin{tikzcd}
\dot{\bigcup}_i A_i \arrow[dr, dashed, "f!"'] & A_j \arrow[l, "\iota_j"'] \arrow[d, "f_j"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\
 & B
\end{tikzcd}
\qquad \forall j \in I
$$

Coproductos y productos

Coproducto en la categoría de Forests. *(unión disjunta)*

$$
\begin{tikzcd}
\dot{\bigcup}_i A_i \arrow[dr, dashed, "f!"'] & A_j \arrow[l, "\iota_j"'] \arrow[d, "f_j"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\
& B
\end{tikzcd}
\qquad \forall j \in I
$$



Coproductos y productos

Coproducto en la categoría de Trees.

Coproductos y productos

Coproducto en la categoría de Trees. $T^{\uparrow} = T \setminus \{\perp\}$, $F_{\perp} = F \cup \{\perp\}$

Coproductos y productos

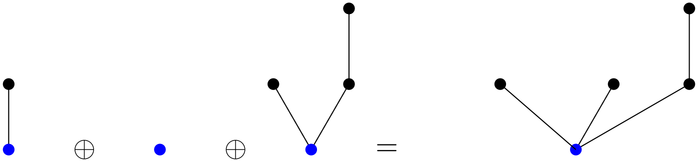
Coproducto en la categoría de Trees. $T^{\uparrow} = T \setminus \{\perp\}$, $F_{\perp} = F \cup \{\perp\}$

$$\begin{tikzcd}
\left(\dot{\bigcup}_i A_i^{\uparrow}\right)_{\perp} \arrow[dr, dashed, "f\,!"'] & A_j \arrow[l, "\iota_j"'] \arrow[d, "f_j"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\
& B
\end{tikzcd} \qquad \forall j \in I$$

Coproductos y productos

Coproducto en la categoría de Trees. $T^{\uparrow} = T \setminus \{\perp\}$, $F_{\perp} = F \cup \{\perp\}$

$$
\begin{tikzcd}
\left(\dot{\bigcup}_i A_i^{\uparrow}\right)_{\perp} \arrow[dr, dashed, "f\,!"'] & A_j \arrow[l, "\iota_j"'] \arrow[d, "f_j"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\
& B
\end{tikzcd}
\qquad \forall j \in I
$$



Coproductos y productos

Producto finito en las categorías de Forests y Trees finitos. S, T trees finitos, F, G, H forests finitos.

Producto finito en las categorías de Forests y Trees finitos. S, T trees finitos, F, G, H forests finitos.

- $\emptyset_\perp \times T \cong T$

Coproductos y productos

Producto finito en las categorías de Forests y Trees finitos. S, T trees finitos, F, G, H forests finitos.

- $\emptyset_\perp \times T \cong T$
- $S \times T \cong (S^\uparrow \times T + S^\uparrow \times T^\uparrow + S \times T^\uparrow)_\perp$

Coproductos y productos

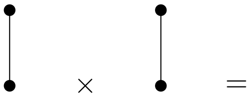
Producto finito en las categorías de Forests y Trees finitos. S, T trees finitos, F, G, H forests finitos.

- $\emptyset_\perp \times T \cong T$
- $S \times T \cong (S^\uparrow \times T + S^\uparrow \times T^\uparrow + S \times T^\uparrow)_\perp$
- $(F + G) \times H \cong (F \times H) + (G \times H)$

Coproductos y productos

Producto finito en las categorías de Forests y Trees finitos. S, T trees finitos, F, G, H forests finitos.

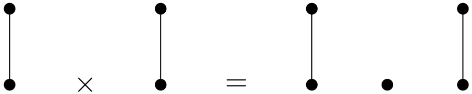
- $\emptyset_\perp \times T \cong T$
- $S \times T \cong (S^\uparrow \times T + S^\uparrow \times T^\uparrow + S \times T^\uparrow)_\perp$
- $(F + G) \times H \cong (F \times H) + (G \times H)$



Coproductos y productos

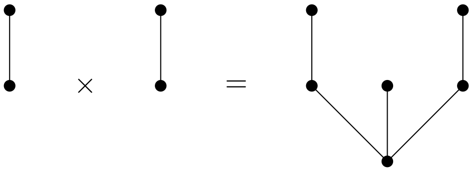
Producto finito en las categorías de Forests y Trees finitos. S, T trees finitos, F, G, H forests finitos.

- $\emptyset_\perp \times T \cong T$
- $S \times T \cong (S^\uparrow \times T + S^\uparrow \times T^\uparrow + S \times T^\uparrow)_\perp$
- $(F + G) \times H \cong (F \times H) + (G \times H)$



Producto finito en las categorías de Forests y Trees finitos. S, T trees finitos, F, G, H forests finitos.

- $\emptyset_\perp \times T \cong T$
- $S \times T \cong (S^\uparrow \times T + S^\uparrow \times T^\uparrow + S \times T^\uparrow)_\perp$
- $(F + G) \times H \cong (F \times H) + (G \times H)$



Tagged trees

T árbol finito. Un subárbol t se dice **atómico cerrado hacia arriba** si

Tagged trees

T árbol finito. Un subárbol t se dice **atómico cerrado hacia arriba** si

- $\perp \in t$ (siempre ocurre por ser subárbol)

Tagged trees

T árbol finito. Un subárbol t se dice **atómico cerrado hacia arriba** si

- $\perp \in t$ (siempre ocurre por ser subárbol)
- si $a \in t$ es átomo de T, $b \in t$ para todo $b \geq a$

Tagged trees

T árbol finito. Un subárbol t se dice **atómico cerrado hacia arriba** si

- $\perp \in t$ (siempre ocurre por ser subárbol)
- si $a \in t$ es átomo de T, $b \in t$ para todo $b \geq a$

Categoría $\mathcal{T}_{t,fin}$:

Tagged trees

T árbol finito. Un subárbol t se dice **atómico cerrado hacia arriba** si

- $\perp \in t$ (siempre ocurre por ser subárbol)
- si $a \in t$ es átomo de T, $b \in t$ para todo $b \geq a$

Categoría $\mathcal{T}_{t,fin}$:

- objetos: (T, t), T árbol finito y t subárbol atómico cerrado hacia arriba

Tagged trees

T árbol finito. Un subárbol t se dice **atómico cerrado hacia arriba** si

- $\bot \in t$ (siempre ocurre por ser subárbol)
- si $a \in t$ es átomo de T, $b \in t$ para todo $b \geq a$

Categoría $\mathcal{T}_{t,fin}$:

- objetos: (T, t), T árbol finito y t subárbol atómico cerrado hacia arriba
- morfismos: $\phi : (T, t) \to (T', t')$ con $\phi : T \to T'$ abierto y $\phi(t) \subset t'$

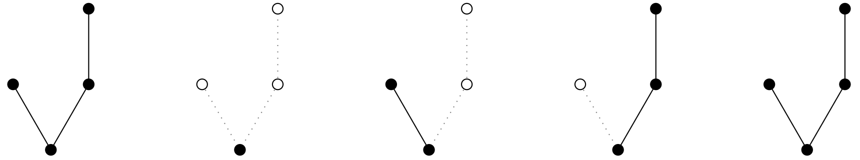
Tagged trees

T árbol finito. Un subárbol t se dice **atómico cerrado hacia arriba** si

- $\perp \in t$ (siempre ocurre por ser subárbol)
- si $a \in t$ es átomo de T, $b \in t$ para todo $b \geq a$

Categoría $\mathcal{T}_{t,fin}$:

- objetos: (T, t), T árbol finito y t subárbol atómico cerrado hacia arriba
- morfismos: $\phi : (T, t) \to (T', t')$ con $\phi : T \to T'$ abierto y $\phi(t) \subset t'$



Coproductos y productos

- **Coproducto de Tagged Trees**

$$(S, s) \oplus (T, t) \cong (S \oplus T, s \oplus t)$$

Coproductos y productos

- **Coproducto de Tagged Trees**

$$(S, s) \oplus (T, t) \cong (S \oplus T, s \oplus t)$$

- **Producto de Tagged Trees**

$$(S, s) \times (T, t) \cong (S \times T, r)$$

Coproductos y productos

- **Coproducto de Tagged Trees**

$$(S,s) \oplus (T,t) \cong (S \oplus T, s \oplus t)$$

- **Producto de Tagged Trees**

$$(S,s) \times (T,t) \cong (S \times T, r)$$

donde

$$r = \Big((s^{\uparrow} \times T) + (s^{\uparrow} \times t^{\uparrow}) + (S \times t^{\uparrow})\Big)_{\perp}$$

Álgebras y Hoops de Gödel

Álgebras y Hoops de Gödel

Un **álgebra de Gödel** $(L, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \bot)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ que satisface

Álgebras y Hoops de Gödel

Un **álgebra de Gödel** $(L, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \bot)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ que satisface

- $(L, \wedge, \vee)$ retículo acotado superiormente por $\top$ e inferiormente por $\bot$

Álgebras y Hoops de Gödel

Un **álgebra de Gödel** $(L, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \bot)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ que satisface

- $(L, \wedge, \vee)$ retículo acotado superiormente por $\top$ e inferiormente por $\bot$
- **(residuación)** $x \rightarrow y \geq z$ si y sólo si $x \wedge z \leq y$

Álgebras y Hoops de Gödel

Un **álgebra de Gödel** $(L, \wedge, \vee, \to, \top, \bot)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ que satisface

- $(L, \wedge, \vee)$ retículo acotado superiormente por $\top$ e inferiormente por $\bot$
- **(residuación)** $x \to y \geq z$ si y sólo si $x \wedge z \leq y$
- **(prelinealidad)** $(x \to y) \vee (y \to x) = \top$

Álgebras y Hoops de Gödel

Un **álgebra de Gödel** $(L, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \bot)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ que satisface

- $(L, \wedge, \vee)$ retículo acotado superiormente por $\top$ e inferiormente por $\bot$
- **(residuación)** $x \rightarrow y \geq z$ si y sólo si $x \wedge z \leq y$
- **(prelinealidad)** $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = \top$

Un **morfismo** de álgebras de Gödel es una función $f : L \rightarrow L'$ con

- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$
- $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
- $f(x \rightarrow y) = f(x) \rightarrow f(y)$

Álgebras y Hoops de Gödel

Un **álgebra de Gödel** $(L, \wedge, \vee, \to, \top, \bot)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ que satisface

- $(L, \wedge, \vee)$ retículo acotado superiormente por $\top$ e inferiormente por $\bot$
- **(residuación)** $x \to y \geq z$ si y sólo si $x \wedge z \leq y$
- **(prelinealidad)** $(x \to y) \vee (y \to x) = \top$

Un **morfismo** de álgebras de Gödel es una función $f : L \to L'$ con

- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$
- $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
- $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$
- $f(\top) = \top$
- $f(\bot) = \bot$

Álgebras y Hoops de Gödel

Un **hoop de Gödel** $(L, \wedge, \vee, \to, \top)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0)$ que satisface

- $(L, \wedge, \vee)$ retículo acotado superiormente por $\top$
- **(residuación)** $x \to y \geq z$ si y sólo si $x \wedge z \leq y$
- **(prelinealidad)** $(x \to y) \vee (y \to x) = \top$

Un **morfismo** de hoops de Gödel es una función $f : L \to L'$ con

- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$
- $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
- $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$
- $f(\top) = \top$

Filtros

$F \subset L$ es **filtro (implicativo)** si

- $\top \in F$
- si $x, x \to y \in F$ entonces $y \in F$

Filtros

$F \subset L$ es **filtro (implicativo)** si

- $\top \in F$
- si $x, x \to y \in F$ entonces $y \in F$

F es **primo** si

- $\bot \notin F$
- si $x \vee y \in F$ entonces $x \in F$ ó $y \in F$

Filtros

$F \subset L$ es **filtro (implicativo)** si

- $\top \in F$
- si $x, x \to y \in F$ entonces $y \in F$

F es **primo** si

- $\bot \notin F$
- si $x \vee y \in F$ entonces $x \in F$ ó $y \in F$

F es **maximal** si

- $F \neq L$
- si $F \subsetneq F'$ entonces $F' = L$

Filtros

$F \subset L$ es **filtro (implicativo)** si

- $\top \in F$
- si $x, x \to y \in F$ entonces $y \in F$

F es **primo** si

- $\bot \notin F$
- si $x \vee y \in F$ entonces $x \in F$ ó $y \in F$

F es **maximal** si

- $F \neq L$
- si $F \subsetneq F'$ entonces $F' = L$

F es **regular** si contiene a todos los elementos de la forma $x \vee (x \to y)$ (elementos **densos**)

Filtros

$F \subset L$ es **filtro (implicativo)** si

- $\top \in F$
- si $x, x \to y \in F$ entonces $y \in F$

F es **primo** si

- $\bot \notin F$
- si $x \vee y \in F$ entonces $x \in F$ ó $y \in F$

F es **maximal** si

- $F \neq L$
- si $F \subsetneq F'$ entonces $F' = L$

F es **regular** si contiene a todos los elementos de la forma $x \vee (x \to y)$ (elementos **densos**)

Los filtros regulares son todo L ó intersección de maximales

Dualidades

$\mathbb{G}_{fin}$ categoría de álgebras de Gödel finitas, $\mathcal{F}_{fin}$ categoría de forests finitos

Dualidades

$\mathbb{G}_{fin}$ categoría de álgebras de Gödel finitas, $\mathcal{F}_{fin}$ categoría de forests finitos

$$\mathrm{Spec} : \mathbb{G}_{fin} \to \mathcal{F}_{fin}$$

Sobre objetos L

$$\mathrm{Spec}(L) = \{\text{filtros primos de } L\}$$

Sobre flechas $f : L \to L'$

$$\mathrm{Spec}(f)(F') = f^{-1}(F')$$

Dualidades

$\mathbb{G}_{fin}$ categoría de álgebras de Gödel finitas, $\mathcal{F}_{fin}$ categoría de forests finitos

$$\mathrm{Sub} : \mathcal{F}_{fin} \to \mathbb{G}_{fin}$$

Sobre objetos G

$$\mathrm{Sub}(G) = \{\text{conjuntos decrecientes de } G\}$$

Sobre flechas $\phi : G \to G'$

$$\mathrm{Sub}(\phi)(G') = \phi^{-1}(G')$$

Dualidades

$\mathbb{GH}_{fin}$ categoría de hoops de Gödel finitos, $\mathcal{T}_{fin}$ categoría de trees finitos

Dualidades

$\mathbb{GH}_{fin}$ categoría de hoops de Gödel finitos, $\mathcal{T}_{fin}$ categoría de trees finitos

$$\mathrm{Spec}^* : \mathbb{GH}_{fin} \to \mathcal{T}_{fin}$$

Sobre objetos L

$$\mathrm{Spec}^*(L) = \{\text{filtros primos de } L\}_\perp$$

Sobre flechas $f : L \to L'$

$$\mathrm{Spec}^*(f)(F') = f^{-1}(F'), \quad \mathrm{Spec}^*(f)(\perp) = \perp$$

Dualidades

$\mathbb{GH}_{fin}$ categoría de hoops de Gödel finitos, $\mathcal{T}_{fin}$ categoría de trees finitos

$$\mathrm{Sub}^* : \mathcal{T}_{fin} \to \mathbb{GH}_{fin}$$

Sobre objetos T

$$\mathrm{Sub}^*(T) = \{\text{conjuntos decrecientes de } T\} \setminus \{\emptyset\}$$

Sobre flechas $\phi : T \to T'$

$$\mathrm{Sub}^*(\phi)(D') = \phi^{-1}(D')$$

NPc y GNPc

Un **retículo residuado de Nelson paraconsistente** ó NPc-lattice es un álgebra $(A, \wedge, \vee, *, \to, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ con

NPc y GNPc

Un **retículo residuado de Nelson paraconsistente** ó NPc-lattice es un álgebra $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ con

- $(A, \wedge, \vee)$ retículo distributivo
- $(A, *, e)$ monoide conmutativo
- **(residuación)** $a \rightarrow b \geq c$ si y sólo si $a * c \leq b$
- e-**involución** $(a \rightarrow e) \rightarrow e = a$ (se define $\sim a = a \rightarrow e$)
- $(a * b) \wedge e = (a \wedge e) * (b \wedge e)$
- $(a \wedge e \rightarrow b) \wedge (\sim b \wedge e \rightarrow \sim a) = a \rightarrow b$
- $(a \wedge e)^2 = a \wedge e$

NPc y GNPc

Un **retículo residuado de Nelson paraconsistente** ó NPc-lattice es un álgebra $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ con

- $(A, \wedge, \vee)$ retículo distributivo
- $(A, *, e)$ monoide conmutativo
- **(residuación)** $a \rightarrow b \geq c$ si y sólo si $a * c \leq b$
- e-**involución** $(a \rightarrow e) \rightarrow e = a$ (se define $\sim a = a \rightarrow e$)
- $(a * b) \wedge e = (a \wedge e) * (b \wedge e)$
- $(a \wedge e \rightarrow b) \wedge (\sim b \wedge e \rightarrow \sim a) = a \rightarrow b$
- $(a \wedge e)^2 = a \wedge e$

Se define $A^- = \{a \leq e\}$

NPc y GNPc

Un **retículo residuado de Nelson paraconsistente** ó NPc-lattice es un álgebra $(A, \wedge, \vee, *, \to, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ con

- $(A, \wedge, \vee)$ retículo distributivo
- $(A, *, e)$ monoide conmutativo
- **(residuación)** $a \to b \geq c$ si y sólo si $a * c \leq b$
- e-**involución** $(a \to e) \to e = a$ (se define $\sim a = a \to e$)
- $(a * b) \wedge e = (a \wedge e) * (b \wedge e)$
- $(a \wedge e \to b) \wedge (\sim b \wedge e \to \sim a) = a \to b$
- $(a \wedge e)^2 = a \wedge e$

Se define $A^- = \{a \leq e\}$
A es una GNPc-lattice si además

$$((a \wedge e \to b) \vee (b \wedge e \to a)) \wedge e = e$$

NPc y GNPc

Un **retículo residuado de Nelson paraconsistente** ó NPc-lattice es un álgebra $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ con

- $(A, \wedge, \vee)$ retículo distributivo
- $(A, *, e)$ monoide conmutativo
- **(residuación)** $a \rightarrow b \geq c$ si y sólo si $a * c \leq b$
- e**-involución** $(a \rightarrow e) \rightarrow e = a$ (se define $\sim a = a \rightarrow e$)
- $(a * b) \wedge e = (a \wedge e) * (b \wedge e)$
- $(a \wedge e \rightarrow b) \wedge (\sim b \wedge e \rightarrow \sim a) = a \rightarrow b$
- $(a \wedge e)^2 = a \wedge e$

Se define $A^- = \{a \leq e\}$
A es una GNPc-lattice si además

$$((a \wedge e \rightarrow b) \vee (b \wedge e \rightarrow a)) \wedge e = e$$

Si A es una GNPc-lattice, A^- es un hoop de Gödel

Twist products

L hoop de Gödel, su **full twist product** $\mathbf{K(L)}$ es $L \times L$ con

Twist products

L hoop de Gödel, su **full twist product** $\mathbf{K(L)}$ es $L \times L$ con

- $(x, y) \sqcap (x', y') = (x \wedge x', y \vee y')$
- $(x, y) \sqcup (x', y') = (x \vee x', y \wedge y')$
- $(x, y) * (x', y') = (x \wedge x', (x \to y') \wedge (x' \to y))$
- $(x, y) \Rightarrow (x', y') = ((x \to x') \wedge (y' \to y), x \wedge y')$
- $\sim (x, y) = (y, x)$

Twist products

L hoop de Gödel, su **full twist product K(L)** es $L \times L$ con

- $(x, y) \sqcap (x', y') = (x \wedge x', y \vee y')$
- $(x, y) \sqcup (x', y') = (x \vee x', y \wedge y')$
- $(x, y) * (x', y') = (x \wedge x', (x \to y') \wedge (x' \to y))$
- $(x, y) \Rightarrow (x', y') = ((x \to x') \wedge (y' \to y), x \wedge y')$
- $\sim (x, y) = (y, x)$

$K(L)$ es una GNPc-lattice con $e = (\top, \top)$ y $K(L)^- \cong L$.

Twist products

L hoop de Gödel, su **full twist product** $\mathbf{K}(\mathbf{L})$ es $L \times L$ con

- $(x, y) \sqcap (x', y') = (x \wedge x', y \vee y')$
- $(x, y) \sqcup (x', y') = (x \vee x', y \wedge y')$
- $(x, y) * (x', y') = (x \wedge x', (x \to y') \wedge (x' \to y))$
- $(x, y) \Rightarrow (x', y') = ((x \to x') \wedge (y' \to y), x \wedge y')$
- $\sim (x, y) = (y, x)$

$K(L)$ es una GNPc-lattice con $e = (\top, \top)$ y $K(L)^- \cong L$.
Las subálgebras de $K(L)$ con $K(L)^- \cong L$ se llaman **twist product** de L

Twist products

L hoop de Gödel, su **full twist product K(L)** es $L \times L$ con

- $(x, y) \sqcap (x', y') = (x \wedge x', y \vee y')$
- $(x, y) \sqcup (x', y') = (x \vee x', y \wedge y')$
- $(x, y) * (x', y') = (x \wedge x', (x \to y') \wedge (x' \to y))$
- $(x, y) \Rightarrow (x', y') = ((x \to x') \wedge (y' \to y), x \wedge y')$
- $\sim (x, y) = (y, x)$

$K(L)$ es una GNPc-lattice con $e = (\top, \top)$ y $K(L)^- \cong L$.
Las subálgebras de $K(L)$ con $K(L)^- \cong L$ se llaman **twist product** de L
L hoop de Gödel y F filtro regular,

$$Tw(L, F) = \{(a, b) : a \vee b \in F\}$$

es un twist product de L.

Equivalencia y Dualidad

Equivalencia y Dualidad

Categoría $\mathbb{GHF}$

- objetos: (L, F), L hoop de Gödel, F filtro regular
- morfismos: $f : (L, F) \to (L', F')$ con $f : L \to L'$ morfismo de hoops y $f(F) \subset F'$

Equivalencia y Dualidad

Categoría $\mathbb{GHF}$

- objetos: (L, F), L hoop de Gödel, F filtro regular
- morfismos: $f : (L, F) \to (L', F')$ con $f : L \to L'$ morfismo de hoops y $f(F) \subset F'$

Categoría $\mathbb{GNPC}$

- objetos: GNPc-lattices
- morfismos: morfismos de GNPc-lattices

Equivalencia y Dualidad

Categoría $\mathbb{GHF}$

- objetos: (L, F), L hoop de Gödel, F filtro regular
- morfismos: $f : (L, F) \to (L', F')$ con $f : L \to L'$ morfismo de hoops y $f(F) \subset F'$

Categoría $\mathbb{GNPC}$

- objetos: GNPc-lattices
- morfismos: morfismos de GNPc-lattices

$$Tw : \mathbb{GHF} \to \mathbb{GNPC}$$

es un funtor que define una equivalencia de categorías.

Equivalencia y Dualidad

Categoría $\mathbb{GHF}$

- objetos: (L, F), L hoop de Gödel, F filtro regular
- morfismos: $f : (L, F) \to (L', F')$ con $f : L \to L'$ morfismo de hoops y $f(F) \subset F'$

Categoría $\mathbb{GNPC}$

- objetos: GNPc-lattices
- morfismos: morfismos de GNPc-lattices

$$Tw : \mathbb{GHF} \to \mathbb{GNPC}$$

es un funtor que define una equivalencia de categorías.

$$Spec^* : \mathbb{GHF}_{fin} \to \mathcal{T}_{t,fin}$$

con $Spec^*(L, F) = (Spec^*(L), t)$, donde t es el subárbol atómico cerrado hacia arriba generado por F, es un funtor que define una dualidad de categorías.

Equivalencia y Dualidad

Categoría $\mathbb{GHF}$

- objetos: (L, F), L hoop de Gödel, F filtro regular
- morfismos: $f : (L, F) \to (L', F')$ con $f : L \to L'$ morfismo de hoops y $f(F) \subset F'$

Categoría $\mathbb{GNPC}$

- objetos: GNPc-lattices
- morfismos: morfismos de GNPc-lattices

$$Tw : \mathbb{GHF} \to \mathbb{GNPC}$$

es un funtor que define una equivalencia de categorías.

$$Spec^* : \mathbb{GHF}_{fin} \to \mathcal{T}_{t,fin}$$

con $Spec^*(L, F) = (Spec^*(L), t)$, donde t es el subárbol atómico cerrado hacia arriba generado por F, es un funtor que define una dualidad de categorías.

Luego $\mathcal{T}_{t,fin}$ es el dual de $\mathbb{GNPC}_{fin}$.

Álgebras Libres

X conjunto, A álgebra es un **álgebra libre** de $\#X$ generadores si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, dashed, "\mathbf{g}!"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Álgebras Libres

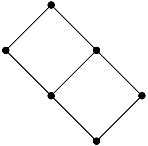
X conjunto, A álgebra es un **álgebra libre** de $\#X$ generadores si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\equiv"] & A \arrow[d, dashed, "\mathbf{g}!"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Si $\mathrm{Free}(i)$ denota al álgebra libre de 1 generador, entonces

$$\mathrm{Free}(n) = \coprod_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(1)$$

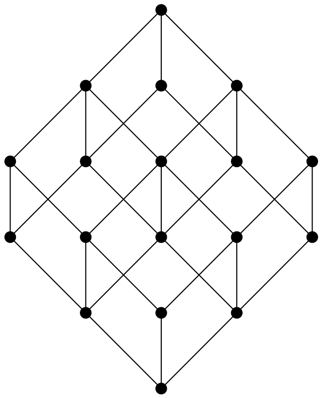
Álgebras Libres



$\mathrm{Free}_{\mathbb{G}}(1)$

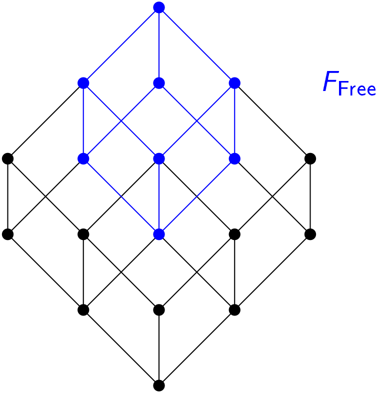
$\mathrm{Free}_{\mathbb{GH}}(1)$

Álgebras Libres



$\mathsf{Free}_{\mathbb{GH}}(2)$

Álgebras Libres



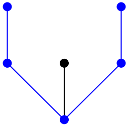
$$\mathsf{Free}_{\mathbb{GNPC}}(1) = Tw\left(\mathsf{Free}_{\mathbb{GH}}(2), F_{\mathsf{Free}}\right)$$

en el dual...

Si llamamos T_n al tagged tree dual a $\mathrm{Free}_{\mathbb{GNPC}}(n)$ tenemos que

en el dual...

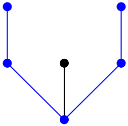
Si llamamos T_n al tagged tree dual a $\mathrm{Free}_{\mathbb{GNPC}}(n)$ tenemos que



T_1

en el dual...

Si llamamos T_n al tagged tree dual a $\mathrm{Free}_{\mathbb{GNPC}}(n)$ tenemos que



T_1

Para $i = 0, \ldots, n-1$, $c_{i,n} = 0$ y para $i = n, \ldots, 2n$, $c_{i,n} = 2^{2n-i}\binom{n}{2n-i}$

$$T_n \cong \bigoplus_{i=0}^{2n-1} \left(\binom{2n}{i} - c_{i,n} \right) ((H_i)_\perp, \emptyset_\perp) \oplus \bigoplus_{i=n}^{2n-1} c_{i,n}((H_i)_\perp, (H_i)_\perp)$$

con $H_i = \mathrm{Spec}^*(\mathrm{Free}_{\mathbb{GH}}(i))$.

Álgebra libre de n generadores para GNPc-lattices

Teorema

$$\begin{aligned} Free_{\mathbb{GNPC}}(n) &\cong \prod_{i=0}^{2n-1} \mathrm{K}((\,Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp})^{\left(\binom{2n}{i}-c_{i,n}\right)} \times \prod_{i=n}^{2n-1} \mathrm{Tw}\,((\,Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp},\ Free_{\mathbb{GH}}(i))^{c_{i,n}} \\ &\cong \mathrm{Tw}\,(\,Free_{\mathbb{GH}}(2n), F)\,, \end{aligned}$$

donde

$$F = \prod_{i=0}^{2n-1} ((\,Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp})^{\left(\binom{2n}{i}-c_{i,n}\right)} \times \prod_{i=n}^{2n-1} (\,Free_{\mathbb{GH}}(i))^{c_{i,n}}\,.$$

Álgebra libre de n generadores para GNPc-lattices

Teorema

$$
\begin{aligned}
Free_{\mathbb{GNPC}}(n) &\cong \prod_{i=0}^{2n-1} \mathrm{K}((\ Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp})^{\left(\binom{2n}{i}-c_{i,n}\right)} \times \prod_{i=n}^{2n-1} \mathrm{Tw}\,((\ Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp},\ Free_{\mathbb{GH}}(i))^{c_{i,n}} \\
&\cong \mathrm{Tw}\,(\ Free_{\mathbb{GH}}(2n), F\,)\,,
\end{aligned}
$$

donde

$$
F = \prod_{i=0}^{2n-1} ((\ Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp})^{\left(\binom{2n}{i}-c_{i,n}\right)} \times \prod_{i=n}^{2n-1} (\ Free_{\mathbb{GH}}(i))^{c_{i,n}}\,.
$$

Corolario

$$
\#Free_{\mathbb{GNPC}}(n) = \prod_{i=0}^{2n-1} (h_i+1)^{2\left(\binom{2n}{i}-c_{i,n}\right)} \cdot (h_i^2+2h_i)^{c_{i,n}}
$$

con $h_0 = 1$ $h_k = \prod_{i=0}^{k-1}(h_i+1)^{\binom{k}{i}}$.

Álgebra libre de n generadores para GNPc-lattices

Teorema

$$\begin{aligned} Free_{\mathbb{GNPC}}(n) &\cong \prod_{i=0}^{2n-1} \mathsf{K}((\ Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp})^{\left(\binom{2n}{i}-c_{i,n}\right)} \times \prod_{i=n}^{2n-1} \mathsf{Tw}\,((\ Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp},\ Free_{\mathbb{GH}}(i))^{c_{i,n}} \\ &\cong \mathsf{Tw}\,(\ Free_{\mathbb{GH}}(2n), F)\,, \end{aligned}$$

donde

$$F = \prod_{i=0}^{2n-1} ((\ Free_{\mathbb{GH}}(i))_{\perp})^{\left(\binom{2n}{i}-c_{i,n}\right)} \times \prod_{i=n}^{2n-1} (\ Free_{\mathbb{GH}}(i))^{c_{i,n}}\,.$$

Corolario

$$\# Free_{\mathbb{GNPC}}(n) = \prod_{i=0}^{2n-1} (h_i+1)^{2\left(\binom{2n}{i}-c_{i,n}\right)} \cdot (h_i^2+2h_i)^{c_{i,n}}$$

con $h_0 = 1$ $h_k = \prod_{i=0}^{k-1}(h_i+1)^{\binom{k}{i}}$. *(Observar que* $\# Free_{\mathbb{GNPC}}(1) = 256$*)*

Referencias

- S. Aguzzoli, S. Bova and B. Gerla, *Chapter IX: Free Algebras and Functional Representation for Fuzzy Logics* from *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic. Volume II.* Studies in Logic. College Publications. 2011.
- Busaniche, M., Cignoli, R.: *Residuated lattices as an algebraic semantics for paraconsistent Nelson logic*. J. Log. Comput. **19**, 1019-1029 (2009).
- Busaniche, M., Cignoli, R.: *Commutative residuated lattices represented by twist-products*, Algebra Universalis **71**, 5-22 (2014).
- Mac Lane, S.: Categories for the Working Mathematician. 2^{nd} edition, Graduate Texts in Mathematics, Volume 5, Springer, Berlin, (1998).
- Odintsov, S. P.: Constructive Negations and Paraconsistency. Trends in Logic-Studia Logica Library 26. Springer. Dordrecht (2008).

¡¡¡Gracias!!!